Relations de comparaison pour les suites

Exercice 1 : Trouver un équivalent simple des suites définies par :

1. $u_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$

2. $v_n = \ln(n+1) - \ln(n)$

3. $w_n = e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+1}}$

4. $z_n = \sqrt{1 + \dfrac{1}{\ln(n+1)}} - 1.$

Exercice 2 : Donner un équivalent de $u_n = (n^2+3n-1)\left(2n - \dfrac{1}{n} + \dfrac{2}{n^2}\right)(e^n - n^3)(\ln(n)+1).$

Exercice 3 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n}$.

En considérant $v_n = \dfrac{1}{u_n}$, montrer que $u_n \sim \dfrac{1}{n}$.

Exercice 4 : Comparer à l'aide du symbole o les trois suites définies par :

$$u_n = n^{(\ln n)^2} \quad ; \quad v_n = (n^2)^{\ln n} \quad ; \quad w_n = (\ln n)^{n \ln n}.$$

Exercice 5 :

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $]-1, +\infty[$, non nulle à partir d'un certain rang, telle que (u_n) converge vers 0. Montrer que $\ln(1+u_n) \sim u_n$.

2. Déterminer un équivalent de $\ln\left(1 + \dfrac{2n}{n^2+1}\right)$.

3. Soit $a \in \mathbb{R}^*$. À l'aide d'un équivalent, déterminer la limite de $\left(1 + \dfrac{a}{n}\right)^n$.

Relations de comparaison pour les fonctions

Exercice 6 : Déterminer un équivalent au voisinage de $+\infty$ de $\dfrac{x^2 - \ln(x) + 3^x}{x^3 - 3\sqrt{x}}$.

Exercice 7 : Donner un équivalent en 0 de $\dfrac{(1-e^x)\sin x}{x^2+x^3}$ et de $\ln(\cos(x))$.

Exercice 8 : À l'aide d'équivalents, déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \ln x}{x^x - 1}$ et $\lim\limits_{x\to 0} (1+\tan x)^{1/\sin x}$.

Développements limités

Exercice 9 : Donner les DL_2, DL_4, DL_{10} et DL_{2022} en 0 de $f(x) = x^{58} + 2x^{12} + 5x^{10} + x^3$.

Exercice 10 : Déterminer les développements limités suivants :

(a) DL_7 en 0 de $\text{ch}(x)$,

(b) DL_8 en 0 de $\text{sh}(x)$,

(c) DL_4 en 0 de $\dfrac{\sin x}{x}$,

(d) DL_5 en 0 de $\sqrt[3]{1+x} + \dfrac{1}{1+x}$,

(e) DL_3 en 0 de $\dfrac{1+x}{2+x}$,

(f) DL_3 en 0 de $\dfrac{e^x - \sqrt{1+2x}}{x}$,

(g) DL_5 en $\dfrac{\pi}{3}$ de $\cos x$,

(h) DL_3 en 0 de $e^x \operatorname{Arctan} x$,

(i) DL_3 en 0 de $\cos(x)\ln(1+x)$,

(j) DL_6 en 0 de $(1 - \text{ch}(x))\sin(x)$,

(k) DL_4 en 0 de $\dfrac{1}{1+x+x^2}$,

(l) DL_5 en $\dfrac{\pi}{4}$ de $\tan(x)$,

(m) DL_3 en 0 de $\text{th}(x)$,

(n) DL_4 en 0 de $\dfrac{x\cos x}{\sin x}$,

(o) DL_8 en 0 de $\sqrt{1+x^2}\ln(1+x^3)$,

(p) DL_3 en 0 de $\ln(1+\sin(x))$,

(q) DL_4 en 0 de $\ln(\cos(x))$,

(r) DL_5 en 0 de $\cos^3 x$,

(s) DL_5 en 0 de $\operatorname{Arctan}(x)$,

(t) DL_5 en 0 de $\operatorname{Arccos}(x)$.

(u) DL_4 en 0 de $\sqrt[3]{1+\cos x}$,

(v) DL_4 en 0 de $\ln(1+\sin x)$,

(w) DL_2 en 0 de $e^{\sqrt{1+x}}$,

(x) DL_4 en 0 de $\sin(x-x^2)$,

(y) DL_4 en 0 de $\cos(x)^{\sin(x)}$,

(z) DL_5 en 0 de $\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt$.

Exercice 11 : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Jusqu'à quel ordre la fonction x^α admet-elle un développement limité en 0 ?

Exercice 12 : La fonction $\dfrac{1}{1+|x|^3}$ admet-elle un DL_2 en 0 ? un DL_3 en 0 ? un DL_4 en 0 ?

Exercice 13 : En posant $y = x - 2$, déterminer les DL_4 en 2 des fonctions e^x, $(1+x)^\alpha$ et $\ln(1+x)$.

Applications des développements limités

Exercice 14 : Déterminer les dérivées $n^{\text{èmes}}$ en 0 de la fonction Arcsin.

Exercice 15 : Déterminer la limite en 0 de

(a) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\ln(1+x)}$, (c) $\dfrac{\sqrt{\sin x} - \sqrt{x}}{\sin \sqrt{x} - \sqrt{x}}$, (e) $\dfrac{e^x}{\mathrm{sh} x} - \dfrac{e^{-x}}{\sin x}$, (g) $\dfrac{\tan x - \operatorname{Arcsin} x}{\sin x - \operatorname{Arctan} x}$,

(b) $\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}$, (d) $\dfrac{1}{x^2} - \operatorname{cotan}^2 x$, (f) $\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{1-\cos 2x}$, (h) $\dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+x}}{\ln(1+x)}$.

Exercice 16 : Déterminer la limite en 0 de $\dfrac{\ln(1+x) - \tan x + \frac{1}{2}\sin^2 x}{3x^2 \sin^2 x}$.

Exercice 17 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1}$.

1. Donner un équivalent simple de f en 0 et en déduire son signe au voisinage de 0 et la pente de sa tangente.

2. Donner un équivalent simple de f en 1.

3. Donner un équivalent simple de f en $+\infty$. En déduire la limite de f en $+\infty$.

4. Montrer que la courbe représentative de f admet une asymptote oblique en $+\infty$ et préciser leurs positions relatives.

Exercice 18 : Donner la tangente et la position par rapport à la tangente en x_0 des fonctions suivantes. Y a-t-il un extremum local en x_0 ?

(a) $\dfrac{1}{1+e^x} + \dfrac{x}{4}$ en $x_0 = 0$,

(b) $\dfrac{2+x+2x^2}{1+x^2}$ en $x_0 = 0$,

(c) $\dfrac{3\ln(1+x) - \ln(1+x^3)}{3x}$ en $x_0 = 0$,

(d) $x + 2\sqrt{x} - \sqrt{3+x}$ en $x_0 = 1$,

(e) $\dfrac{\ln x}{x-1} + \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2}$ en $x_0 = 1$,

(f) x^α en $x_0 > 0$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 19 : Déterminer l'asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x^4}{1+x^2}}$ en $+\infty$, ainsi que leurs positions relatives.

Exercice 20 : Donner une asymptote en $+\infty$ et la position par rapport à l'asymptote de

(a) $\sqrt{x(2+x)}e^{\frac{1}{x}}$, (b) $(x^3+x^2+x+1)^{\frac{1}{3}}$, (c) $\ln(e^{x^2} - e^x - 1)$.

Exercice 21 : On considère l'équation $e^{-\varepsilon x} = x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$, avec un paramètre $\varepsilon > 0$.

(a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une unique solution x_ε dans $\mathbb{R}_+$.

(b) Montrer que $x_\varepsilon \leq 1$. En déduire que $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} x_\varepsilon = 1$.

(c) Par ce qui précède, montrer que $x_\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{=} e^{-\varepsilon} + o(\varepsilon)$. En déduire un DL_1 de x_ε quand $\varepsilon \to 0$.

(d) Par la même méthode, montrer que $x_\varepsilon = 1 - \varepsilon + \dfrac{3\varepsilon^2}{2} + o(\varepsilon^2)$.

L'exercice 22 remanié est en page 3

Dans l'exercice 22, exceptionnellement on notera $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ au lieu de $u_n \to \ell$ pour aider à la compréhension.

Exercice 22 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'équation $x + \ln x = n$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$.

(a) Montrer que la fonction $f : x \mapsto x + \ln x$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.

(b) En déduire que pour tout n, il existe une unique solution notée x_n. On a donc une "relation fondamentale" :

$$\boxed{x_n + \ln x_n = n}$$

(c) Montrer que (x_n) est croissante, puis montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

(d) Avec une composition, montrer que $\ln x_n \underset{n\to+\infty}{=} o(x_n)$. En déduire que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

(e) Justifier que $x_n \underset{n\to+\infty}{=} n + o(n)$.

(f) En déduire que $x_n \underset{n\to+\infty}{=} n - \ln n + o(1)$. *Indication : utiliser la question précédente et la relation fondamentale.*

(g) En déduire que $x_n \underset{n\to+\infty}{=} n - \ln n + \dfrac{\ln n}{n} + o\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$. *Indication : utiliser la question précédente et la relation fondamentale.*